Die Abstiegsfunktion

4. November 2003

Sei

$$f = \mathbf{function}(x{:}A)\ B \quad \Phi(f, x)$$

eine rekursive Definition einer Funktion $f : A \to B$. Hier ist $\Phi(f, x)$ der Rumpf der rekursiven Definition.

Beispiel:

$$\text{fib} = \mathbf{function}(n{:}\textbf{int})\textbf{int}\ \underbrace{\textbf{if}\ n{=}0 \lor n{=}1\ \textbf{then}\ 1\ \textbf{else}\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)}_{\text{Das ist } \Phi(\text{fib}, n).}$$

Ich habe bewusst andere Variablennamen gewählt, also n statt x, fib statt f.

Sei weiter A' eine Teilmenge von A. Wir wollen zeigen, dass $A' \subseteq D(f)$, also dass f für alle $x \in A'$. Im Beispiel könnten wir $A' = \{n{\in}\textbf{int} \mid n \geq 0\}$ versuchen.

Zu diesem Zweck müssen wir folgendes tun:

- Eine Funktion $m : A \to \mathbb{N}$ angeben. Das ist die Abstiegsfunktion.
- Nachweisen, dass falls $x \in A'$ dann für alle Aufrufe $f(y)$ in $\Phi(f, x)$ folgendes gilt: Erstens ist $y \in A'$ und zweitens ist $m(y) < m(x)$.
- Nachweisen, dass $\Phi(f, x)$ definiert ist für alle $x \in A'$ unter der Annahme, dass $f(y)$ definiert ist für alle $y \in A'$. (Das wollen wir ja eigentlich erst zeigen, aber hier dürfen wir's annehmen.)

Gelingt es, das zu tun, so folgt $A' \subseteq D(f)$. Wir beweisen das nicht formal, aber intuitiv kann man sich vorstellen, dass die Kette der rekursiven Aufrufe in diesem Fall irgendwann abbricht, denn eine Folge von immer kleiner werdenden natürlichen Zahlen bricht irgendwann ab.

Mit anderen Worten: wäre es so, dass für ein $x \in A'$ der Aufruf $f(x)$ nicht terminiert, weil in $\Phi(f, x)$ der Aufruf $f(y_1)$ getätigt wird und in $\Phi(f, y_1)$ der Aufruf $f(y_2)$ getätigt wird und in $\Phi(f, y_2)$ der Aufruf $f(y_3)$ getätigt wird und in $\Phi(f, y_3)$ der Aufruf $f(y_4)$ getätigt wird und in $\Phi(f, y_4)$ der Aufruf $f(y_5)$ getätigt wird… Dann wären die y_i alle in A' und es gilt $m(x) > m(y_1) > m(y_2) > m(y_3) > m(y_4) > \ldots$ was nicht sein kann, da $m : A \to \mathbb{N}$.

Wohlfundierte Relationen Dieses Argument geht ganz genau so, wenn man statt $\mathbb{N}$ für das Ziel der Abstiegsfunktion eine andere Menge M wählt, auf der man eine Relation $\sqsubset \subseteq M \times M$ hat, die die Rolle von $<$ übernehmen kann. Soll heißen, dass es nicht möglich ist, eine Folge von Elementen $m_1, m_2, m_3, \dots \in M$ zu finden, sodass $m_1 \sqsupset m_2 \sqsupset m_3 \sqsupset \dots$.

Auf der Folie hatte ich R statt $\sqsubset$ geschrieben, aber das kann man schlecht herumdrehen (da bräuchte man das Я).

Eine Relation $\sqsubset$, derart, dass es keine unendliche Folge von Elementen m_i gibt mit $m_{i+1} \sqsubset m_i$ heißt *wohlfundierte Relation*.

Man kann Abstiegsfunktionen auf beliebige wohlfundierte Relationen verallgemeinern; man ersetzt dann $\mathbb{N}$ durch M und $<$ durch $\sqsubset$. Natürlich ist $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wohlfundiert, ebenso ist es $\sqsubset \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$ wobei $(x_1, x_2) \sqsubset (y_1, y_2)$, falls $x_1 < y_1$ oder $x_1 = y_1$ und $x_2 < y_2$.

Beispiele:

$$f = \mathbf{function}(x{:}\mathbf{int})\mathbf{if}\ x \geq 100\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ f(x+1)$$

Hier kann man $A' = \mathbf{int}$ wählen und $m(x) = \mathbf{if}\ x \geq 100\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ 100 - x$.

$$f = \mathbf{function}(x{:}\mathbf{int})\mathbf{if}\ x \geq 100\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ f(x+1)$$

Hier kann man $A' = \mathbf{int}$ wählen und $m(x) = \mathbf{if}\ x \geq 100\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ 100 - x$.

$$f = \mathbf{function}(x{:}\mathbf{int}, y{:}\mathbf{int})\mathbf{int}\ \mathbf{if}\ x{=}0\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ \mathbf{if}\ y{=}0\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ f(x{+}1.y{-}1){+}f(x{-}1, y)$$

Hier kann man wählen $A' = \{(x, y) \mid x \geq 0 \land y \geq 0\}$ und $m(x, y) = x + 2y$.

$$f = \mathbf{function}(x{:}\mathbf{nat}, y{:}\mathbf{nat})\mathbf{nat}\ \mathbf{if}\ y{=}0\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else}\ f(y-1, x+1)$$

Hier muss man sich mit $A' = D(f) = \{(0, y) \mid y \in \mathbf{int}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{int}\}$ zufriedengeben. Jeder Versuch, eine Abstiegsfunktion zu definieren muss scheitern, denn der Aufruf $f(x, y)$ führt auf $f(y-1, x+1)$ und dann wieder auf $f(x, y)$.