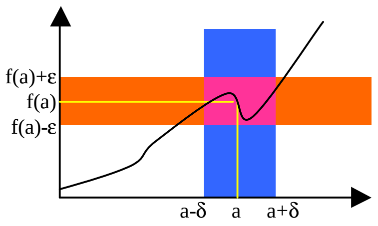
Stetig – Glm. Stetig – Lipschitz-Stetig

Sei f: X → Y, mit (X,d_X), (Y,d_Y) metrische Räume.

Definition: Stetigkeit
f stetig in $a \in X$, falls gilt:
$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 : \forall x \in X : [(d_X(x,a)<\delta) \Rightarrow (d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon)]$
f stetig, falls $\forall a \in X$: f stetig in a.



Hier wird das δ in Abhängigkeit von dem a gewählt.

Bsp. für nichtstetige Funktion:

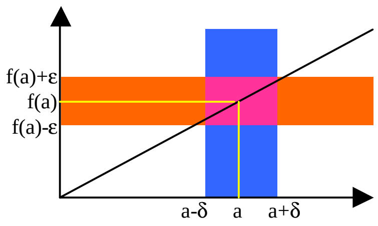
- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$
- $1_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, sonst \end{cases}$
- Treppenfunktionen

Bsp. für stetige Funktion:

- Polynomfunktionen
- konstante Funktionen
- Identität
- Injektionen
- Exponentialfunktion/Logarithmus

Negation der Aussage über Stetigkeit:
$\exists a \in X : \exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0 : \exists x \in X :$
$[(d_X(x,a)<\delta) \Leftarrow (d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon)]$

Definition: Glm. stetig
f glm. stetig, falls gilt.
$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 : \forall x,x' \in X :$
$[(d_X(x,x')<\delta) \Rightarrow (d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon)]$



Hier kann das δ unabhängig von dem a gewählt werden.

Bsp. für stetig, aber nicht glm. stetig:

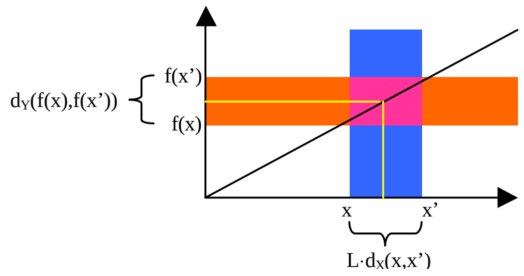
- $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- Polynomfunktionen vom Grad >1
- Exponentialfunktion/Logarithmus

Bsp. für glm. stetig:

- $f(x) = \sin(x)$
- konstante Funktionen
- $f(x)=\alpha x$, mit $\alpha \in K$

Satz:
- f_1,f_2: X → Y_1,Y_2 stetig ⇒ $f_1 + f_2$ stetig
- $f=(f_1,f_2)$: X → Y_1,Y_2 stetig
$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 : X \to Y_1 stetig \\ f_2 : X \to Y_2 stetig \end{cases}$
- $f=(f_1,\ldots,f_n)$: X → K^n stetig
⇔ f komponentenweise stetig

Definition: Lipschitz-Stetig
f Lipschitz-Stetig, falls gilt:
$\exists L \geq 0 : \forall x,x' \in X : d_Y(f(x),f(x')) \leq L\, d_X(x,x')$



Bsp. für glm. stetig, aber nicht Lipschitz-Stetig:

- f: $[0,\infty[\to \mathbb{R}$: $f(x)=\sqrt{x}$

Bsp. für Lipschitz-Stetig:

- Identität, mit L=1, falls |X|>1
- Konstante Fkt., mit L=0
- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^n$ auf [-a,a], a>0
$$\left|x^n - y^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right| \left|x-y\right| \leq L\left|x-y\right|$$
mit $L:=na^{n-1}$.
- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ auf $[a,\infty[, a>0$:
$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x}^{k} \sqrt[n]{y}^{n-1-k}} \leq L|x-y|$$
$$L := \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} a^{-\frac{n-1}{n}}.$$