Leonhard Fellermayr
Mat.Nr. 221281305090
Tutorium E (Do 14-16 Linde/Wugalter E06)

Übungen zur Analysis I für Informatiker - Blatt 13 (keine Abgabe)

Aufgabe 56. Grenzwerte / de l'Hospital.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} =^{(dH)} \lim_{x\to 1} \frac{2x-5}{2x} = -\frac{3}{2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} x^\alpha \cdot \ln(x) = 0$$

Begründung[1]: $x^\alpha \to 0$ schneller als $\ln(x) \to -\infty$ für $x \to 0$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-\sin(x)}{e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^{2x}} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}} = 0 - 0 = 0$$

Aufgabe 1. Untersuchung einiger Reihen auf Konvergenz.

(a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+\sqrt{k}}$$

Es handelt sich um eine alternierende Reihe. Anwendung des **Leibnizkriteriums**:
Zeige $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ monoton fallende Nullfolge.

1. $\frac{1}{k+\sqrt{k}} > \frac{1}{k+1+\sqrt{k+1}} \Rightarrow$ streng monoton fallend
2. $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ Nullfolge

Die Reihe **konvergiert** somit nach dem Leibniz'schen Konvergenzkriterium.

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{2^k \cdot k!}$$

Anwendung des **Wurzelkriteriums**:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^k}{2^k \cdot k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{2^k \cdot k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2 \cdot \sqrt[k]{k!}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot \sqrt[k]{k!}}{k}} =^{(*)} \frac{1}{\frac{2}{e}} = \frac{e}{2} > 1$$

Weil der Grenzwert > 1 ist, **divergiert** diese Reihe.

Aufgabe 2. Konvergenzradius.

(a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = 1$$

[1] vgl. Formelsammlung S. 55

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{2^k \cdot k!} \cdot x^k$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^k}{2^k \cdot k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2 \cdot \sqrt[k]{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{k} \cdot \sqrt[k]{k!}} =^{(*)} \frac{1}{\frac{2}{e}} = \frac{e}{2}$$

(*): mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$

Aufgabe 3. Ableitungen.

(a) $$f(x) = \frac{1}{3^{(x^2)}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(3^{(x^2)})' = \exp'(x^2 \cdot \ln(3)) \cdot 2x \cdot \ln(3) = 3^{(x^2)} \cdot 2x \cdot \ln(3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3^{(x^2)} \cdot 2x \cdot \ln(3)}{\left[3^{(x^2)}\right]^2} = \frac{-2x \cdot \ln 3}{3^{(x^2)}}$$

(b) $$g(x) = \ln \sqrt{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$$

(c) $$h(x) = (x^x)^x \quad (x > 0)$$

$$h(x) = (x^x)^x = e^{x \cdot \ln(x^x)} = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \quad \text{(durch Umformung)}$$

$$\Rightarrow h'(x) = (x^x)^x \cdot (2x\ln(x) + x) = (x^x)^x \cdot x(2 \cdot \ln(x) + 1)$$

(d) $$k(x) = e^{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(x \neq 0, x \neq \frac{1}{(k+0,5)\pi} (k \in \mathbb{Z})\right)$$

$$k'(x) = e^{\tan\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \text{(vgl. 6a)}$$

Aufgabe 4.

(a) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left[x^2 \cdot \ln(x)\right] = 0 \text{ (Spezialfall von 56c)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left[x^2 \cdot \ln(x)\right] = \infty$$

(b) $$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = x(2 \cdot \ln(x) + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Untersuchung des Steigungsverhaltens um die Stelle x_0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\nearrow\frac{1}{\sqrt{e}}} f'(x) < 0 \\ \lim_{x\searrow\frac{1}{\sqrt{e}}} f'(x) > 0 \end{array}\right\} \text{Es handelt sich bei } \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ um ein Minimum.}$$

Alternativ über die 2. Ableitung:

Ist $f''(x) > 0$, so handelt es sich bei der Stelle x um ein Minimum. Dieses Kriterium ist hinreichend, aber nicht notwendig[2] (!).

$$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln(x) + 3$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + 3 = 2 \cdot (\ln(1) - \ln(\sqrt{e})) + 3 =$$

$$= -2 \cdot \ln(\sqrt{e}) + 3 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 2 > 0$$

$x = 0$ als Nullstelle der Ableitung kann kein Extremum sein, da kein *limes inferior* existiert.

(c) Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \ln(x) = 0 \Rightarrow x \in 0; 1$$

Die Funktion hat also Nullstellen bei (0/0) und (1/0). Nach dem **Satz von Rolle**[3] fällt ein Extremum in diesen Bereich: nämlich das Minimum an der Stelle $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} / -\frac{1}{2e}\right)$.

Damit und gemäß Zwischenwertsatz hat f für $y \in]-\frac{1}{2e}, 0]$ zwei Lösungen, für $y = -\frac{1}{2e}$ (Minimum) eine Lösung.

Aufgabe 5. Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

> Aus Forster, Kap. 15 Differentiation, S. 149 (vgl. Vorlesung, **Satz 5.7**):
> **Satz 3** (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $D^* = f(D)$.
>
> Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt
>
> $$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

(a) Die Existenz einer Umkehrfunktion für $x > 1$ sei begründet durch die Bijektivität von f in diesem Bereich.

$f(x)$ ist differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (1, \infty)$. Damit ist die Umkehrfunktion auf $(f(1), \infty) = (0, \infty)$ differenzierbar.

(b) Zunächst Berechnung von $f^{-1}(e^2)$:

$$e^2 = x^2 \cdot \ln(x) \Rightarrow x = e$$

Damit ist

$$\left(f^{-1}\right)'(e^2) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{e \cdot (2 \cdot \ln(e) + 1)} = \frac{1}{3 \cdot e}$$

Aufgabe 6. Grenzwerte.

[2] vgl. Forster, S. 157, Satz 5
[3] vgl. VL, Satz 5.11 und Forster, S. 155

(a) Zur Erinnerung noch einmal die Ableitung von $\tan x$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Jetzt Berechnung des Grenzwertes (Quotientenregel):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

(b) Einfache Lösung durch Substitution, denn $\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

(c) Hier ist de l'Hospital möglich, aber die Bestimmung des Grenzwerts ist trivial, da Zähler und Nenner höchstens das Vorzeichen unterscheidet.

$$\lim_{x\searrow 3} \frac{|x^2-2x-3|}{x^2-2x-3} = \lim_{x\searrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\nearrow 3} \frac{|x^2-2x-3|}{x^2-2x-3} = \lim_{x\nearrow 3} \frac{-(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} = -1$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6} =^{(dH)} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$